

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전재하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

제12장 z 변환

[Quick Review]

※ 다음 문제에서 옳은 것을 골라라.

(1) z 변환은 DTFT에 비해 더 (많은, 적은) 이산 신호를 변환할 수 있다.

Ans) 많은

(2) 단방향 z 변환은 (인과, 비인과) 신호를 대상으로 한다.

Ans) 인과

(3) z 변환은 모든 이산 신호를 주파수 영역으로 변환할 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(4) $x[n]$ 과 $X(z)$ 가 일대일 대응이 되는 것은 (단방향, 양방향) z 변환이다.

Ans) 단방향

(5) z 변환의 수렴 영역이 정의되지 않는 양방향 신호도 있다. (○, ×)

Ans) ○

(6) 단방향 z 변환에서 항상 $x[n-n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$ 가 성립한다. (○, ×)

Ans) ×

(7) 차분 방정식의 풀이에 유용한 성질은 (시간 컨벌루션, 시간 이동) 성질이다.

Ans) 시간 이동

(8) 최종값 정리는 모든 신호에 대해 적용 가능하다. (○, ×)

Ans) ×

(9) z 역변환은 ($\frac{X(z)}{z}$, $X(z)$, $zX(z)$)를 부분분수로 전개하는 것이 간편하다.

Ans) $\frac{X(z)}{z}$

(10) 다중극에 대한 부분분수 계수 결정은 보통 최저차항부터 오름차순으로 한다. (○, ×)

Ans) ×

(11) 공역 복소극을 갖는 $X(z)$ 를 역변환하면 (실수, 복소수) 함수가 된다.

Ans) 실수

(12) z 변환을 이용한 차분 방정식 풀이의 초기 조건은 $n < 0$ 에서의 값이다. (○, ×)

Ans) ○

(13) 시스템의 전달 함수는 입력의 형태에 따라 달라질 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(14) 전달 함수는 (임펄스 응답, 차분 방정식, 특성 방정식)으로부터 구할 수 있다.

Ans) 임펄스 응답, 차분 방정식

(15) 시스템의 특성 방정식은 전달 함수의 (분모, 분자)=0인 방정식이다.

Ans) 분모

(16) 두 시스템을 종속 연결한 시스템의 전달 함수는 각 전달 함수의 (합, 곱)과 같다.

Ans) 곱

(17) 임펄스 응답의 형태는 극의 위치에 따라 결정된다. (○, ×)

Ans) ○

(18) z 평면의 단위원 위에 중극을 가지면 시스템은 불안정하다. (○, ×)

Ans) ○

(19) 시스템이 안정하려면 (극, 영점)이 z 평면의 단위원 (안, 밖)에 위치해야 한다.

Ans) 극, 안

(20) 전달 함수에서 ($z = j\Omega$, $z = e^{j\Omega}$, $z = re^{j\Omega}$)로 두면 주파수 응답이 된다.

Ans) $z = e^{j\Omega}$

[기초 문제]

12.1 z 변환의 정의식을 이용하여 다음 신호의 z 변환을 구하라.

(a) $x[n] = (0.5)^n (u[n] - u[n-5])$

Ans)
$$X(z) = \sum_{n=0}^4 (0.5)^n z^{-n} = \frac{z^4 + 0.5z^3 + (0.5)^2 z^2 + (0.5)^3 z + (0.5)^4}{z^4}$$

(b) $x[n] = n(0.5)^n u[n]$

Ans)
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n (0.5)^n z^{-n} = 1 \left(\frac{0.5}{z} \right) + 2 \left(\frac{0.5}{z} \right)^2 + 3 \left(\frac{0.5}{z} \right)^3 + 4 \left(\frac{0.5}{z} \right)^4 + \dots$$

$$\left(1 - \frac{0.5}{z} \right) X(z) = \frac{0.5}{z} + \left(\frac{0.5}{z} \right)^2 + \left(\frac{0.5}{z} \right)^3 + \left(\frac{0.5}{z} \right)^4 + \dots = \frac{0.5/z}{1 - \frac{0.5}{z}}$$

$$\therefore X(z) = \frac{0.5z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})^2}$$

(c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \text{인 짝수} \\ 0, & n \geq 0 \text{인 홀수} \end{cases}$

Ans)
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = z^0 + z^{-2} + z^{-4} + z^{-6} + z^{-8} + \dots = \frac{z^2}{z^2 - 1}$$

(d) $x[n] = \begin{cases} +1, & n \geq 0 \text{인 짝수} \\ -1, & n \geq 0 \text{인 홀수} \end{cases}$

Ans)
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} = \frac{z}{z+1}$$

12.2 다음 신호의 양방향 z 변환과 수렴 영역(ROC)을 구하라.

(a) $x[n] = (0.5)^n u[-n]$

Ans)
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0.5)^n u[-n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$$

수렴 영역 : $|z| < 0.5$

(b) $x[n] = (0.5)^{-n} u[-n-1]$

Ans)
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0.5)^{-n} u[-n-1] z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (0.5)^n z^n = \frac{0.5z}{1-0.5z}$$

수렴 영역 : $|z| < 2$

(c) $x[n] = (0.5)^{|n|}$

Ans)
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0.5)^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (0.5)^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n z^{-n} = \frac{0.5z}{1-0.5z} + \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

수렴 영역 : $0.5 < |z| < 2$

(d) $x[n] = (0.5)^{-n}u[n] + (0.5)^nu[-n-1]$

Ans) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^{-n}z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} (0.5)^nz^{-n} = \frac{1}{1-(2)z^{-1}} + \frac{2z}{1-(2)z}$

이 경우 수렴 영역은 $|z| > 2$ 과 $|z| < 0.5$ 를 동시에 만족해야 하는데, 모순이므로 z 변환은 존재 않는다.

12.3 다음의 신호 $x[n]$ 에 대해 $y[n] = x[n+3]$ 의 단방향 z 변환을 구하라.

(a) $x[n] = a^nu[n]$

Ans) $y[n] = x[n+3] = a^{n+3}u[n+3]$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+3}z^{-n} = \frac{a^3z}{z-a}$$

(b) $x[n] = nu[n]$

Ans) $y[n] = x[n+3] = (n+3)u[n+3]$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)z^{-n} = \frac{z(3z-2)}{(z-1)^2}$$

12.4 z 변환의 성질과 변환쌍표를 이용하여 다음 신호의 z 변환을 구하라.

(a) $x[n] = n^2u[n]$

Ans) $x'[n] = nu[n]$ 라 두면 $x[n] = nx'[n]$ 이므로, 주파수 미분 성질을 이용하여

$$X(z) = -z \frac{dX'(z)}{dz} = -z \frac{-(z^2-1)}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

(b) $x[n] = (0.5)^{n+1}u[n-1]$

Ans) z 변환의 성질과 변환쌍표에서

$$a^nu[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$x[n-m] \Leftrightarrow z^{-m}X(z)$$

$$x[n] = (0.5)^{n+1}u[n-1] = 0.25(0.5)^{n-1}u[n-1] \text{ 이므로}$$

$$x[n] = (0.5)^{n+1}u[n-1] \Leftrightarrow z^{-1} \frac{0.25z}{z-0.5} = \frac{0.25}{z-0.5}$$

(c) $x[n] = \sin(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2})u[n-2]$

Ans) $x'[n] = \sin(\frac{\pi}{4}n)u[n]$ 이라 두면

$$X'(z) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})z}{z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{4})z + 1}$$

$$x[n] = \sin(\frac{\pi}{4}(n-2))u[n-2] = x'[n-2] \text{ 이므로 시간 이동 성질에 의해}$$

$$X(z) = z^{-2}X'(z) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{z(z^2 - 2\cos(\frac{\pi}{4})z + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2z(z^2 - \sqrt{2}z + 1)}$$

(d) $x[n] = u[n-2] * (\frac{2}{3})^n u[n]$

Ans) $x_1[n] = u[n-2]$, $x_2[n] = (\frac{2}{3})^n u[n]$ 이라 두면 시간 컨벌루션 성질에 의해

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) = \frac{1}{(z-1)(z-\frac{2}{3})}$$

12.5 $x[n]$ 의 z 변환이 다음과 같을 때, 다음의 신호들의 z 변환을 구하라.

$$X(z) = \frac{z}{(z+0.5)^2}, \quad |z| > 0.5$$

(a) $y[n] = x[n-1]$

Ans) z 변환의 시간이동 성질을 이용하면

$$Y(z) = z^{-1}X(z) = \frac{1}{(z+0.5)^2}, \quad |z| > 0.5$$

(b) $y[n] = (2)^n x[n]$

Ans) z 변환의 주파수 척도 변환 성질을 이용하면

$$Y(z) = X(\frac{z}{2}) = \frac{z/2}{(z/2+0.5)^2} = \frac{2z}{(z+1)^2}, \quad |z| > 1$$

(c) $y[n] = (-1)^n x[n]$

Ans) $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]z^{-n} = X(-z)$

$$\therefore Y(z) = -\frac{z}{(z-0.5)^2}, \quad |z| > 0.5$$

(d) $y[n] = x[n] * x[n-2]$

Ans) 시간 이동 성질과 시간 컨벌루션 성질에 의해

$$Y(z) = X(z) \cdot z^{-2}X(z) = z^{-2}X^2(z) = \frac{1}{z(z+0.5)^4}, \quad |z| > 0.5$$

12.6 다음에 주어진 두 신호 $x[n]$ 과 $h[n]$ 의 컨벌루션 $y[n] = x[n] * h[n]$ 을 z 변환을 이용하여 구하라.

(a) $x[n] = [1, 2, 3]$, $h[n] = [1, 1, 1]$

Ans) $Y(z) = X(z)H(z) = (1+2z^{-1}+3z^{-2})(1+z^{-1}+z^{-2})$
 $= 1+3z^{-1}+6z^{-2}+5z^{-3}+3z^{-4}$

$$y[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 5\delta[n-3] + 3\delta[n-4]$$

$$= [1, 3, 6, 5, 3]$$

(b) $x[n] = \delta[n] + \delta[n-4]$, $h[n] = u[n]$

Ans) $Y(z) = X(z)H(z) = (1+z^{-4})(\frac{1}{1-z^{-1}}) = \frac{1}{1-z^{-1}} + z^{-4}\frac{1}{1-z^{-1}}$

$$y[n] = u[n] + u[n-4] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + 2u[n-4]$$

(c) $x[n] = u[n], \quad h[n] = u[n]$

Ans) $Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = z \frac{z}{(z-1)^2}$

$y[n] = (n+1)u[n+1] = r[n+1]$

($\because n=-1$ 에서의 값이 0이므로 굳이 시간 이동된 단방향 z 변환에서 뺄 이유가 없음)

(d) $x[n] = u[n], \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Ans) $Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$

$y[n] = 2u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = (2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n)u[n]$

12.7 다음과 같은 단방향 z 변환에 대해 역변환을 하지 말고 초깃값과 최종값을 구하여라. 만약 값을 구할 수 없다면 그 이유를 설명하라.

(a) $X(z) = \frac{z}{z^2 - 0.3z - 0.1}$

Ans) z 변환의 초깃값 정리 및 최종값 정리를 적용하면

초깃값 : $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^2 - 0.3z - 0.1} = 0$

최종값 : $x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{z^2 - 0.3z - 0.1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z}{(z-0.5)(z+0.2)} = 0$

(b) $X(z) = \frac{z(z-0.5)}{z^2 - z + 1}$

Ans) z 변환의 초깃값 정리 및 최종값 정리를 적용하면

초깃값 : $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z-0.5)}{z^2 - z + 1} = 1$

최종값 : 없음 ($\because$ 신호의 극($z^2 - z + 1 = 0$ 의 근)은 $\frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2}$ 로서 단위원 상에 존재 $\rightarrow$ 순수 진동)

(c) $X(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1.5z - 1}$

Ans) z 변환의 초깃값 정리 및 최종값 정리를 적용하면

초깃값 : $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{z^2 + 1.5z - 1} = 1$

최종값 : 없음 ($\because$ 신호의 극($z^2 + 1.5z - 1 = 0$ 의 근)은 $z = -2, 0.5$ 로서 단위원 밖에 존재 $\rightarrow$ 불안정)

(d) $X(z) = \frac{z(z-0.25)}{z^2 - 0.5z + 0.25}$

Ans) z 변환의 초깃값 정리 및 최종값 정리를 적용하면

초깃값 : $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z-0.25)}{z^2 - 0.5z + 0.25} = 1$

$$\text{최종값} : x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z(z-0.25)}{x^2 - 0.5z + 0.25} = 0$$

12.8 다음의 단방향 z 변환의 역변환 $x[n]$ 을 부분분수 전개법으로 구하라.

$$(a) X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\text{Ans)} X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

$$x[n] = 2u[n] - (0.5)^n u[n] = (2 - (0.5)^n)u[n]$$

$$(b) X(z) = \frac{0.5z(z+1)}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\text{Ans)} X(z) = \frac{0.5z(z+1)}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{2z}{z-1} - \frac{1.5z}{z-0.5}$$

$$x[n] = 2u[n] - 1.5(0.5)^n u[n] = (2 - 1.5(0.5)^n)u[n]$$

$$(c) X(z) = \frac{z(2z+3)}{(z-1)(z^2-5z+6)}$$

$$\text{Ans)} X(z) = \frac{z(2z+3)}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{2.5z}{z-1} - \frac{7z}{z-2} + \frac{4.5z}{z-3}$$

$$x[n] = 2.5u[n] - 7 \cdot (2)^n u[n] + 4.5 \cdot (3)^n u[n]$$

$$(d) X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}$$

$$\text{Ans)} X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{z}{z+1} + \frac{3}{4} \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$x[n] = \frac{1}{4}(-1)^n u[n] + \frac{3}{4}u[n] + \frac{1}{2}nu[n] = \frac{1}{4}((-1)^n + 3 + 2n)u[n]$$

$$(e) X(z) = \frac{z(3z-1)}{(z+1)(z-1)^3}$$

$$\text{Ans)} X(z) = \frac{z(3z-1)}{(z+1)(z-1)^3} = \frac{1}{2} \frac{z}{z+1} + \frac{z}{(z-1)^3} + \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{z}{(z-1)^3} \text{은 } n^2 a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{az(z+a)}{(z-a)^3} \text{을 이용하여 역변환해야 하므로}$$

$$X(z) = \frac{2(3z-1)}{(z+1)(z-1)^3} = \frac{1}{2} \frac{z}{z+1} + \frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}(-1)^n u[n] + \frac{1}{2}n^2 u[n] + \frac{1}{2}nu[n] - u[n] = \frac{1}{2}((-1)^n + n^2 + n - 2)u[n]$$

$$(f) X(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0.5}$$

$$\text{Ans)} X(z) = \frac{z(z-0.5)}{z^2 - z + 0.5} + \frac{0.5z}{z^2 - z + 0.5}$$

지수 감쇠 정현파 신호의 변환쌍과 비교하면

$$\begin{cases} 2a \cos \Omega = 0.5 \\ a^2 = 0.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Omega = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$x[n] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

12.9 다음과 같은 임펄스 응답을 갖는 두 개의 시스템을 종속 연결할 경우, 병렬 연결할 경우의 전체 시스템의 전달 함수 $H(z)$ 을 구하라.

$$h_1[n] = a^n u[n], \quad h_2[n] = b^{(n-1)} u[n-1]$$

Ans) $H_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$

$$H_2(z) = z^{-1} \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \frac{1}{z - b}$$

종속 연결 : $H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{z}{z - a} \frac{1}{z - b} = \frac{z}{(z - a)(z - b)}$

병렬 연결 : $H(z) = H_1(z) + H_2(z) = \frac{z}{z - a} + \frac{1}{z - b} = \frac{z^2 + (1 - b)z - a}{(z - a)(z - b)}$

12.10 인과 LTI 시스템의 입출력이 다음과 같이 주어질 때, 이 시스템의 전달 함수, 임펄스 응답, 차분 방정식을 구하라.

(a) $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] - \frac{1}{8}\delta[n-2], \quad y[n] = \delta[n] - \frac{3}{4}\delta[n-1]$

Ans) $X(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}$

$$Y(z) = 1 - \frac{3}{4}z^{-1}$$

(1) 전달 함수

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z - \frac{3}{4}}{(z - \frac{1}{4})(z + \frac{1}{2})}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z) = \frac{-\frac{2}{3}z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{5}{3}z}{z + \frac{1}{2}}$$

$$\therefore h[n] = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \frac{1}{3}\left(5\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) u[n]$$

(3) 차분 방정식

$$\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z) = \left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)X(z)$$

$$\therefore y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{3}{4}x[n-1]$$

$$(b) \quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$\text{Ans) } X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{z}{z-0.5}$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1-0.25z^{-1}} = \frac{z}{z-0.25}$$

(1) 전달 함수

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.25z^{-1}} = \frac{z-0.5}{z-0.25}$$

(2) 임펄스 응답

$$h[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-0.25} - \frac{0.5}{z-0.25} \right\} = (0.25)^n u[n] - 0.5(0.25)^{(n-1)} u[n-1] = \delta[n] - (0.25)^n u[n-1]$$

(3) 차분 방정식

$$(1-0.25z^{-1})Y(z) = (1-0.5z^{-1})X(z) \\ \therefore y[n] - 0.25y[n-1] = x[n] - 0.5x[n-1]$$

$$(c) \quad x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n], \quad y[n] = \left(3(-1)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) u[n]$$

$$\text{Ans) } X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(3(-1)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) z^{-n} = \frac{3}{1+z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{4z^2}{(z+1)(z-\frac{1}{3})}$$

(1) 전달 함수

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{4\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{4z\left(z+\frac{1}{3}\right)}{(z+1)(z-\frac{1}{3})}$$

(2) 임펄스 응답

$$h[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{2z}{z+1} - \frac{2z}{z-\frac{1}{3}} \right\} = 2(-1)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(3) 차분 방정식

$$\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}-\frac{1}{3}z^{-2}\right)Y(z) = 4\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)X(z) \\ \therefore y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] - \frac{1}{3}y[n-2] = 4x[n] + \frac{4}{3}x[n-1]$$

$$(d) \quad x[n] = 2u[n], \quad y[n] = \left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right) u[n]$$

$$\text{Ans) } X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2z^{-n} = \frac{2}{1-z^{-1}} = \frac{2z}{z-1}$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right) z^{-n} = \frac{4}{1-0.5z^{-1}} - \frac{3}{1+0.75z^{-1}} = \frac{z^2+4.5z}{(z-0.5)(z+0.75)}$$

(1) 전달 함수

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(0.5 + 2.25z^{-1})(1 - z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.75z^{-1})} = \frac{(0.5z + 2.25)(z - 1)}{(z - 0.5)(z + 0.75)}$$

(2) 임펄스 응답

$$h[n] = Z^{-1} \left\{ 6 - \frac{2z}{z - 0.5} - \frac{3.5z}{z + 0.75} \right\} = 6\delta[n] - (2(0.5)^n + 3.5(-0.75)^n)u[n]$$

(3) 차분 방정식

$$\begin{aligned} (1 - 0.25z^{-1} - 0.375z^{-2})Y(z) &= (0.5 + 1.75z^{-1} - 2.25z^{-2})X(z) \\ \therefore y[n] - 0.25y[n-1] - 0.375y[n-2] &= 0.5x[n] + 1.75x[n-1] - 2.25x[n-2] \end{aligned}$$

[응용 문제]

12.11 $x[n] \Leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$ 일 때 다음의 단방향 z 변환쌍 중 틀린 것은?

$$\begin{array}{ll} \textcircled{㉠} x[n+1]u[n] \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2} & \textcircled{㉡} x[n-1]u[n-1] \Leftrightarrow \frac{1}{(z-1)^2} \\ \textcircled{㉢} x[n-1]u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2} & \textcircled{㉣} x[n]u[n-1] \Leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2} \end{array}$$

Ans) ㉢

$x[n] = nu[n]$ 이므로 $x[n-1]u[n] = x[n-1]u[n-1]$ 이다.
 $x[n+1]u[n] = x[n+1]u[n+1]$, $x[n]u[n-1] = x[n]$ 이다.

12.12 다음의 $X(z)$ 에 대해 주어진 수렴 영역을 만족하는 역변환 $x[n]$ 을 구하라.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} X(z) = \frac{2z-1}{z^2-z-0.75} & \text{(i)} |z| > 1.5, & \text{(ii)} 0.5 < |z| < 1.5 & \text{(iii)} |z| < 0.5 \end{array}$$

Ans) $X(z) = \frac{2z-1}{(z+0.5)(z-1.5)} = \frac{1}{z+0.5} + \frac{1}{z-1.5}$

(i) $|z| > 1.5$: 두 신호 모두 인과 신호인 경우

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{z+0.5} + \frac{1}{z-1.5} = \frac{z^{-1}}{1+0.5z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}} \\ \therefore x[n] &= \{(-0.5)^{(n-1)} + (1.5)^{(n-1)}\}u[n-1] = \left\{-2(-0.5)^n + \frac{2}{3}(1.5)^n\right\}u[n-1] \end{aligned}$$

(ii) $0.5 < |z| < 1.5$: 양방향 신호로서 앞의 신호는 인과 신호, 뒤의 신호는 비인과 신호인 경우

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{z+0.5} + \frac{1}{z-1.5} = \frac{z^{-1}}{1+0.5z^{-1}} - \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}z} \\ \therefore x[n] &= (-0.5)^{(n-1)}u[n-1] - \frac{2}{3}(1.5)^nu[-n] \end{aligned}$$

(iii) $|z| < 0.5$: 두 신호 모두 비인과 신호인 경우

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{z+0.5} + \frac{1}{z-1.5} = 2\frac{1}{1+2z} - \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}z} \\ \therefore x[n] &= \left\{2(-0.5)^n - \frac{2}{3}(1.5)^n\right\}u[-n] \end{aligned}$$

$$\text{(b)} X(z) = \frac{z^2+5z}{z^2-2z-3}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} |z| > 3 & \text{(ii)} 1 < |z| < 3 & \text{(iii)} |z| < 1 \end{array}$$

Ans) $X(z) = \frac{z(z+5)}{(z-3)(z+1)} = \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z+1}$

(i) $|z| > 3$: 두 신호 모두 인과 신호인 경우

$$X(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z+1} = 2\frac{1}{1-3z^{-1}} - \frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$\therefore x[n] = \{2 \cdot 3^n - (-1)^n\}u[n]$$

(ii) $1 < |z| < 3$: 양방향 신호로서 첫 번째 항은 비인과 신호, 두 번째 항은 인과 신호의 경우

$$X(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z+1} = -2\frac{\frac{1}{3}z}{1-\frac{1}{3}z} - \frac{1}{1+z^{-1}}$$

$$\therefore x[n] = -2(3)^n u[-n-1] - (-1)^n u[n]$$

(iii) $|z| < 1$: 두 신호 모두 비인과 신호인 경우

$$X(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z+1} = -2\frac{\frac{1}{3}z}{1-\frac{1}{3}z} - \frac{z}{1+z}$$

$$\therefore x[n] = \{-2(3)^n - (-1)^n\}u[-n-1]$$

12.13 신호 $x[n]$ 의 z 변환이 다음과 같다.

$$X(z) = \frac{z^3}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9}$$

(a) $x_1[n] = x[n-3]u[n-3]$ 의 z 변환을 구하라.

Ans) z 변환의 시간이동(시간지연) 성질을 이용하면

$$X_1(z) = z^{-3} \frac{z^3}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9} = \frac{1}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9}$$

(b) $x_2[n] = x[n+3]u[n]$ 의 z 변환을 구하여라.

Ans) z 변환의 시간이동(시간선행) 성질을 이용하면

$$X_2(z) = \frac{z^6}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9} - (z^3 x[0] + z^2 x[1] + z x[2])$$

(c) 긴 나눗셈을 이용한 멱급수 형태의 역 변환을 통해 $n=0, 3$ 일 때의 $x[n]$ 값, $n=3$ 일 때의 $x_1[n]$ 값, $n=0$ 일 때의 $x_2[n]$ 값을 구하여 비교하라.

Ans)

(i) $n=0, 3$ 일 때의 $x[n]$ 값

$$\begin{array}{r}
1 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 6z^{-3} + \dots \\
\hline
z^3 - 3z^2 + 5z - 9 \quad) \quad z^3 \\
\quad \quad \quad z^3 - 3z^2 + 5z - 9 \\
\hline
\quad \quad \quad 3z^2 - 5z + 9 \\
\quad \quad \quad 3z^2 - 9z + 15 - 27z^{-1} \\
\hline
\quad \quad \quad 4z - 6 + 27z^{-1} \\
\quad \quad \quad 4z - 12 + 20z^{-1} - 36z^{-2} \\
\hline
\quad \quad \quad 6 + 7z^{-1} + 36z^{-2} \\
\quad \quad \quad 6 - 18z^{-1} + 30z^{-2} - 54z^{-3} \\
\hline
\quad \quad \quad 25z^{-1} + 6z^{-2} + 54z^{-3} \\
\quad \quad \quad \vdots
\end{array}$$

따라서

$$\begin{aligned}
X(z) &= 1 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 6z^{-3} + \dots \\
\therefore x[0] &= 1, \quad x[3] = 6
\end{aligned}$$

(ii) $n = 3$ 일 때의 $x_1[n] = x[n-3]u[n-3]$ 값

$$\begin{array}{r}
z^{-3} + 3z^{-4} + \dots \\
\hline
z^3 - 3z^2 + 5z - 9 \quad) \quad 1 \\
\quad \quad \quad 1 - 3z^{-1} + 5z^{-2} - 9z^{-3} \\
\hline
\quad \quad \quad 3z^{-1} - 5z^{-2} + 9z^{-3} \\
\quad \quad \quad 3z^{-1} - 9z^{-2} + 15z^{-3} - 27z^{-4} \\
\hline
\quad \quad \quad 4z^{-2} - 6z^{-3} + 27z^{-4} \\
\quad \quad \quad \vdots
\end{array}$$

따라서

$$\begin{aligned}
X_1(z) &= z^{-3} + 3z^{-4} + \dots \\
\therefore x_1[3] &= 1
\end{aligned}$$

(iii) $n = 0$ 일 때의 $x[n+3]u[n]$ 값

$$\begin{aligned}
X_2(z) &= \frac{z^6}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9} - (z^3x[0] + z^2x[1] + zx[2]) = \frac{6z^3 + 7z^2 + 36z}{z^3 - 3z^2 + 5z - 9} \\
&\quad \quad \quad 6 + 25z^{-1} + \dots \\
&\quad \quad \quad \hline
&\quad \quad \quad z^3 - 3z^2 + 5z - 9 \quad) \quad 6z^3 + 7z^2 + 36z \\
&\quad \quad \quad \quad \quad \quad 6z^3 - 18z^2 + 30z - 54 \\
&\quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
&\quad \quad \quad \quad \quad \quad 25z^2 + 6z + 54 \\
&\quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
X_2(z) &= 6 + 25z^{-1} + \dots \\
\therefore x_2[0] &= 6
\end{aligned}$$

(d) (c)의 결과값들은 일치하는가? 그렇다면 이유를 설명하라.

Ans) $x_1[n]$ 은 인과 신호 $x[n]$ 을 $n=3$ 만큼 지연시킨 신호이므로 시간 이동에 의해 가감되는 샘플 성분이 없다. 따라서 이의 z 변환 $X_1(z)$ 을 역변환하더라도 $x_1[3]=x[0]$ 을 만족한다.

또한 $x_2[n]$ 은 $x[n]$ 을 $n=3$ 만큼 시간 선행하여 $n<0$ 에 해당되는 샘플 성분들을 버린 인과 신호이기 때문에 이의 z 변환 $X_2(z)$ 을 역변환하게 되면 $x_2[0]=x[3]$ 을 만족한다.

12.14 $X(z)$ 가 신호 $x[n] = (0.5)^n u[n]$ 의 z 변환이라고 할 때, 다음의 z 변환에 대응되는 시간 신호를 구하라.

(a) $Y(z) = X(z^{-1})$

Ans) 시간 반전 성질을 이용하면

$$y[n] = x[-n] = (0.5)^{-n} u[-n]$$

(b) $Y(z) = X(-z)$

$$\begin{aligned} \text{Ans)} \quad Y(z) &= X(-z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-z)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] z^{-n} \\ \therefore y[n] &= (-1)^n x[n] \end{aligned}$$

(c) $Y(z) = X(2z)$

Ans) 주파수 척도조절 성질에 의해

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u[n]$$

(d) $Y(z) = X^2(z)$

Ans) 시간 컨벌루션 성질로부터

$$y[n] = x[n] * x[n] = (0.5)^n u[n] * (0.5)^n u[n] = \sum_{k=0}^n (0.5)^k (0.5)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (0.5)^n = (n+1)(0.5)^n$$

(e) $Y(z) = \frac{zX(z)}{z-1}$

$$\text{Ans)} \quad Y(z) = \frac{z}{z-1} \cdot X(z)$$

z 변환의 시간 컨벌루션 성질에 의해

$$y[n] = u[n] * x[n] = u[n] * (0.5)^n u[n] = \sum_{k=0}^n (0.5)^k$$

(f) $Y(z) = \frac{d}{dz} X(z)$

$$\text{Ans)} \quad \frac{d}{dz} X(z) = -z^{-1} \left(-z \frac{d}{dz} X(z) \right)$$

주파수 미분 성질과 시간 이동 성질에 의해

$$y[n] = -(n-1)x[n-1] = -(n-1)(0.5)^{n-1} u[n-1]$$

12.15 다음의 $X(z)$ 와 신호의 정상상태 값 $x[\infty]$ 의 짝 중에서 틀린 것은?

$$\textcircled{㉓} X(z) = \frac{2z+4}{(z-1)(z^2+z+1)}, \quad x[\infty] = 2$$

$$\textcircled{㉔} X(z) = \frac{2z-4}{(z-1)(z^2-z-1)}, \quad x[\infty] = 2$$

$$\textcircled{㉕} X(z) = \frac{z^2-1}{(z-1)^2(z^2-z+1)}, \quad x[\infty] = 2$$

$$\textcircled{㉖} X(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2(z^2-z+1)}, \quad x[\infty] = 2$$

Ans) ㉖

$(z-1)X(z)$ 가 단위원 위에 존재하는 불안정 극($z=1$)을 가진다.

12.16 다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 대해 z 변환을 이용하여 출력 $y[n]$ 을 구하라.

$$(a) \quad y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = 2x[n], \quad x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad y[-1] = 1$$

Ans) $Y(z) - \frac{1}{3}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) = 2X(z)$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{3}y[-1]}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \frac{2}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{\frac{1}{3}z}{z - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{5}z}{z - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{6}{5}z}{z + \frac{1}{2}}$$

$$y[n] = \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n] \right] + \left[\frac{4}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n] + \frac{6}{5} \left(-\frac{1}{2} \right)^n u[n] \right] = \frac{17}{15} \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n] + \frac{6}{5} \left(-\frac{1}{2} \right)^n u[n]$$

$$(b) \quad y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = \frac{3}{8}x[n], \quad x[n] = u[n], \quad y[-1] = 1, \quad y[-2] = 5$$

Ans) $Y(z) - \frac{3}{4}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) + \frac{1}{8}(z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = \frac{3}{8}X(z)$

$$Y(z) = \frac{\frac{3}{4}y[-1] - \frac{1}{8}y[-2] - \frac{1}{8}y[-1]z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} + \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} X(z)$$

$$= \left[-\frac{1}{4} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{3}{8} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} \right] + \left[-\frac{3}{4} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{z}{z - 1} \right]$$

$$y[n] = \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{4} \right)^n u[n] \right] + \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \right)^n u[n] + u[n] \right]$$

$$= \left(-\left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^n + 1 \right) u[n]$$

$$(c) \quad y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1], \quad x[n] = \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n], \quad y[-1] = 1, \quad y[-2] = 0$$

Ans) $Y(z) - \frac{1}{6}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) - \frac{1}{6}(z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{6}y[-1] + \frac{1}{6}y[-2] + \frac{1}{6}y[-1]z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} + \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{2}{15}z}{z + \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}z}{z + \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$y[n] = \left[\frac{3}{10} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] - \frac{2}{15} \left(-\frac{1}{3} \right)^n u[n] \right] + \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n] \right]$$

$$= \frac{3}{10} \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] + \frac{11}{30} \left(-\frac{1}{3} \right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n]$$

(d) $y[n] - y[n-1] + y[n-2] = x[n]$, $x[n] = \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n]$, $y[-1] = 1$, $y[-2] = 0$

Ans) $Y(z) - (z^{-1}Y(z) + y[-1]) + (z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = X(z)$

$$Y(z) = \frac{y[-1] - y[-2] - y[-1]z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} + \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$= \frac{z(z-1)}{z^2 - z + 1} + \frac{z^3}{(z^2 - z + 1)(z - \frac{1}{2})} = \frac{\frac{5}{3}z(z - \frac{1}{2})}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$y[n] = \left(\frac{5}{3} \cos \frac{\pi}{3} n + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) u[n]$$

12.17 다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 관해 물음에 답하라.

$$y[n] - 0.3y[n-1] - 0.1y[n-2] = 7x[n]$$

(a) 이 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

Ans) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{7}{1 - 0.3z^{-1} - 0.1z^{-2}} = \frac{7z^2}{(z - 0.5)(z + 0.2)} = \frac{5z}{z - 0.5} + \frac{2z}{z + 0.2}$

$$h[n] = 5(0.5)^n u[n] + 2(-0.2)^n u[n]$$

(b) 이 시스템은 안정한가? 불안정한가?

Ans) 특성방정식 : $z^2 - 0.3z - 0.1 = (z - 0.5)(z + 0.2) = 0$

특성근 $z = 0.5, -0.2 \rightarrow$ 시스템은 안정하다.

(c) 입력 $x[n] = \delta[n]$ 을 인가할 때, z 변환을 이용하여 출력 $y[n]$ 을 구하라. 단 $y[-1] = 3$, $y[-2] = -1$ 이다.

Ans) $Y(z) - 0.3(z^{-1}Y(z) + y[-1]) - 0.1(z^{-2}Y(z) + y[-1]z^{-1} + y[-2]) = 7X(z)$

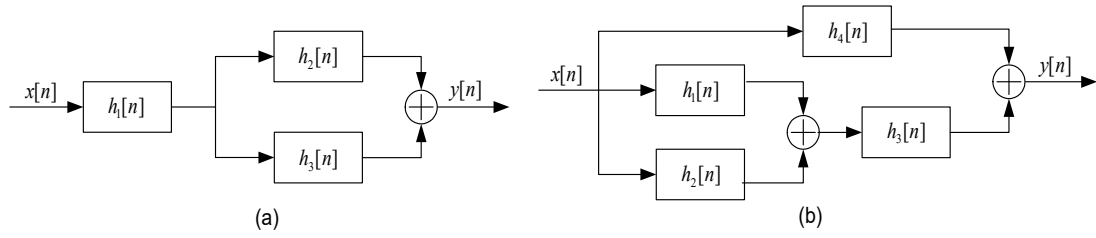
$$Y(z) = \frac{z^2}{(z - 0.5)(z + 0.2)} + \frac{0.8z^2 + 0.3z}{(z - 0.5)(z + 0.2)} = \left[\frac{5z}{z - 0.5} + \frac{2z}{z + 0.2} \right] + \left[\frac{z}{z - 0.5} - \frac{0.2z}{z + 0.2} \right]$$

$$y[n] = [5(0.5)^n + 2(-0.2)^n] + [(0.5)^n - 0.2(-0.2)^n]$$

(d) (c)의 결과와 (a)의 임펄스 응답은 어떻게 다른가?

Ans) (c)의 결과는 입력 $x[n] = \delta[n]$ 이므로 초기조건에 의한 응답 성분인 영입력 응답을 빼면 임펄스 응답이 된다. 즉 임펄스 응답에 초기조건의 영향이 더해진 응답이 (c)의 결과이다.

12.18 다음 그림과 같이 연결된 이산 LTI 시스템에 대해 전체 시스템의 임펄스 응답을 구하라. 단, 각 시스템의 임펄스 응답은 다음과 같다.



$$(a) \quad h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad h_2[n] = \delta[n], \quad h_3[n] = u[n-1]$$

$$\text{Ans) } h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n])$$

$$H(z) = H_1(z)(H_2(z) + H_3(z))$$

$$H_1(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$H_2(z) = 1$$

$$H_3(z) = z^{-1} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

$$\therefore H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z-1)} = -\frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2z}{z-1}$$

$$\therefore h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2u[n] = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u[n]$$

$$(b) \quad h_1[n] = 2\delta[n], \quad h_2[n] = -2(0.5)^n u[n], \quad h_3[n] = 0.5\delta[n] - 0.25\delta[n-1], \quad h_4[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1]$$

$$\text{Ans) } h[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n] + h_4[n]$$

$$H(z) = (H_1(z) + H_2(z))H_3(z) + H_4(z)$$

$$H_1(z) = 2$$

$$H_2(z) = -\frac{2z}{z-0.5}$$

$$H_3(z) = 0.5 - 0.25z^{-1} = \frac{0.5z - 0.25}{z}$$

$$H_4(z) = 1 + 0.5z^{-1} = \frac{z + 0.5}{z}$$

$$\therefore H(z) = \left(2 - \frac{2z}{z-0.5}\right) \frac{0.5z - 0.25}{z} + \frac{z + 0.5}{z} = -\frac{0.5(z-0.5)}{z(z-0.5)} + \frac{z+0.5}{z} = 1$$

$$\therefore h[n] = \delta[n]$$

12.19 다음의 차분 방정식으로 표현되는 인과 LTI 시스템의 전달 함수와 임펄스 응답을 구하라. 그리고 시스템의 극과 영점을 구하고 안정도를 판별하라.

$$(a) \quad y[n] - 0.3y[n-1] - 0.1y[n-2] = x[n]$$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z) - 0.3z^{-1}Y(z) - 0.1z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1} - 0.1z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.3z - 0.1}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z+0.2)} = \frac{5}{7} \frac{z}{z-0.5} + \frac{2}{7} \frac{z}{z+0.2}$$

$$\therefore h[n] = \left(\frac{5}{7}(0.5)^n + \frac{2}{7}(-0.2)^n \right) u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

극 : $z = 0.5, -0.2$ & 영점 : $z = 0, 0$

안정도 : 극이 모두 단위원 안에 있으므로 안정

$$(b) y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z) - \frac{5}{6}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{6}z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{z^2 + z}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z) = \frac{9z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{8z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$\therefore h[n] = \left(9\left(\frac{1}{2}\right)^n - 8\left(\frac{1}{3}\right)^n \right) u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

극 : $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ & 영점 : $z = 0, -1$

안정도 : 극이 모두 단위원 안에 있으므로 안정

$$(c) y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z) - \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{3}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z) = \frac{2z}{z + \frac{1}{2}} - \frac{z}{z - \frac{3}{4}}$$

$$\therefore h[n] = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

극 : $z = -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ & 영점 : $z = 2$

안정도 : 극이 모두 단위원 안에 있으므로 안정

$$(d) \ y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{9}{16}y[n-2] = 2x[n] + x[n-1]$$

Ans) (1) 전달 함수

$$Y(z) - \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) + \frac{9}{16}z^{-2}Y(z) = 2X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{9}{16}z^{-2}} = \frac{2z^2 + z}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16}}$$

(2) 임펄스 응답

$$H(z) = \frac{\frac{5}{2}z}{(z - \frac{3}{4})^2} + \frac{2z}{z - \frac{3}{4}}$$

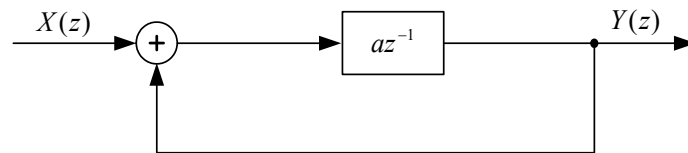
$$\therefore h[n] = (\frac{5}{2}n + 2)(\frac{3}{4})^n u[n]$$

(3) 극과 영점 및 안정도

$$\text{극} : z = \frac{3}{4} \text{ (중극)} \quad \& \quad \text{영점} : z = 0, -\frac{1}{2}$$

안정도 : 극이 모두 단위원 안에 있으므로 안정

12.20 다음 그림과 같은 이산 시스템의 블록선도가 있다.



(a) 이 시스템의 차분 방정식 모델을 구하라.

Ans) $Y(z) = az^{-1}X(z) + az^{-1}Y(z)$

$$\therefore y[n] - ay[n-1] = ax[n-1]$$

(b) 이 시스템의 전달 함수를 구하라.

Ans) $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{a}{z - a}$

(c) 이 시스템이 BIBO 안정일 경우 파라미터 a 의 범위를 결정하라.

Ans) BIBO 안정하려면 극 $p_1 = a$ 이 z 평면에서 단위원 내에 존재해야 한다.

$$\therefore |a| < 1$$

(d) 이 시스템의 임펄스 응답을 구하라. (c)의 답은 임펄스 응답으로부터 명백한가? 그 이유는 무엇인가?

Ans) $h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = a^n u[n-1]$

시스템이 BIBO 안정하기 위해서는 임펄스 응답이 절대 총합 가능해야 한다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

이는 임펄스 응답이 발산하지 않고 수렴해야 함을 의미하며, 따라서 $|a| < 1$ 을 만족해야 한다.

(e) $a = 0.5$ 일 때 이 시스템의 단위 계단 응답을 구하라.

Ans) $X(z) = \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{0.5}{z-0.5} \frac{z}{z-1} = -\frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-1}$$

$$\therefore y[n] = u[n] - (0.5)^n u[n]$$